# Colles de Maths - semaine 1 - MP-MP*
# Lycée Aux Lazaristes

Julien Allasia - ENS de Lyon

**Choses à retenir**

- Retenir la méthode du $u_{n+1}^{\beta}-u_n^{\beta}$ pour les suites récurrentes (accompagnée d'une intuition discret/continu), et conclure avec le théorème de Cesàro.
- Pour les suites définies implicitement, faire des dessins, étudier la monotonie pour aboutir à la convergence, puis déterminer la limite et le développement en réinjectant successivement la suite dans son équation.
- Bien comprendre l'intérêt de la compacité : avoir des limites en extrayant, transformer des inf en min, des sup en max, des inégalités larges en inégalités strictes...

## Suites numériques

**Exercice 1** (**) Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, l'équation $\tan x = x$ admet une unique solution dans l'intervalle $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$, notée $x_n$. Donner un développement asymptotique à l'ordre $\frac{1}{n}$ de $x_n$.

**Exercice 2** (**) Montrer que l'équation $e^x = x^n$ admet deux solutions strictement positives $u_n < v_n$ pour $n$ assez grand, et donner un développement asymptotique à deux termes de $u_n$.

**Exercice 3** (**) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, l'équation $x^n + x - 1 = 0$ admet une unique racine positive notée $x_n$. Donner un développement asymptotique à deux termes de $x_n$.

**Exercice 4** (*) Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^{\alpha}}$.
Donner un équivalent de $u_n$.
*Indication :* On pourra considérer $u_{n+1}^{\beta} - u_n^{\beta}$ pour $\beta \in \mathbb{R}_+^*$.

## Topologie

**Exercice 5** (*) Soit $E$ un espace vectoriel normé (ou métrique). Soit $D$ une partie dense de $E$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une application continue qui admet un prolongement continu à $D \cup \{x\}$ pour tout $x \in E$. Montre que $f$ admet un prolongement continu sur $E$.

**Exercice 6** (*) Soit $E$ un espace vectoriel normé (ou un espace métrique). Soit $A$ et $B$ deux parties non vides disjointes de $E$. On définit la distance de $A$ à $B$ par

$$d(A,B) = \inf_{(x,y)\in A\times B} d(x,y).$$

1. On suppose $A$ fermé. A-t-on $d(A,B) > 0$ ? Et si l'on suppose $B$ fermé ? réduit à un point ? compact ?
2. Donner des conditions suffisantes sur $A, B$ ou $E$ pour qu'il existe $x \in A$ et $y \in B$ tels que $d(A,B) = d(x,y)$.
3. Si $A$ et $B$ sont fermés, montrer qu'il existe deux ouverts disjoints $U$ et $V$ tels que $A \subseteq U$ et $B \subseteq V$.

**Exercice 7** (**) Soit $E$ un espace vectoriel normé. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

*(i)* $E$ est de dimension finie.

*(ii)* La boule unité fermée de $E$ est compacte.

*(iii)* La sphère unité de $E$ est compacte.

*(iv)* De toute suite bornée de $E$, on peut extraire une sous-suite convergente.

*Indication : S'inspirer du cas où $E$ est un espace préhilbertien.*

**Exercice 8** (**) Soit $K$ un compact (dans un espace vectoriel normé ou métrique) et $f : K \to K$ telle que

$$\forall x \neq y \in K, \quad d(f(x), f(y)) < d(x, y).$$

Montrer que $f$ possède un unique point fixe $\alpha$ et que si $x_0 \in K$, $x_{n+1} = f(x_n)$, $(x_n)_{n \geq 0}$ converge vers $\alpha$.